令和４年度採用

群馬県公立高等学校教員選考試験問題

数　　　学

受験番号		氏名	

注　意　事　項

1　「開始」の指示があるまでは、問題用紙を開かないでください。

2　問題は、１ページから３ページまであります。「開始」の指示後、すぐに確認してください。

3　解答は、すべて解答用紙に記入してください。

4　「終了」の指示があったら、直ちに筆記具を置き、問題用紙と番号順に重ねた解答用紙を机の上に置いてください。

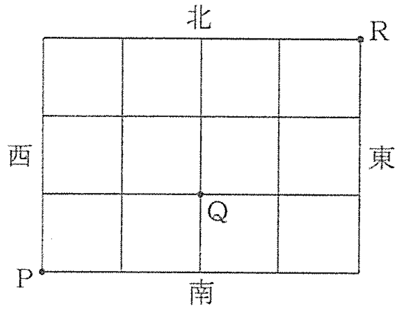
5　退席の指示があるまで、その場でお待ちください。

6　この問題用紙は、持ち帰ってください。

1　次の問いに答えなさい。ただし，解答は結果のみ記入しなさい。

(1)　$8-2\sqrt{3}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$a^2-2ab+b^2$ の値を求めよ。

(2)　ある街には，右の図のように東西に 4 本，南北に 5 本の道が等間隔で並んでおり，それぞれが垂直に交わっている。地点Ｐから地点Ｑを通って，地点Ｒまで，最短の距離でたどり着く道順は全部で何通りあるか，求めよ。



(3)　自然数 N を 3 進法で表すと，$120120_{(3)}$ である。N を 10 進法で表せ。

(4)　複素数平面上において，方程式 $|z|=2|z-3i|$ を満たす点 z の全体が表す図形を求めよ。

(5)　3 点 A(1, 2)，B(5, 2)，C(1, 5) を頂点にもつ△ABC について，外心，内心，重心の座標をそれぞれ求めよ。

(6)　不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2+x}{2x^3+x^2+3}dx$ を求めよ。ただし，積分定数をＣとする。

(7)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos n\pi$ の収束，発散について調べ，収束すればその和を求めよ。

2　3^{2022} について，次の問いに答えなさい。ただし，$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1)　3^{2022} の桁数を求めよ。

(2)　3^{2022} の一の位の数字を求めよ。

(3)　3^{2022} の最高位の数字を求めよ。

3　四面体 OABC において, 辺 OA を 2 : 1 に内分する点を D, △ BCD の重心を G, 直線 OG と 3 点 A, B, C を通る平面との交点を E とする。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えなさい。

(1)　$\overrightarrow{OG}$ を，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　OG : GE を求めよ。

4　次の問いに答えなさい。

(1)　$\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ を，$\cos\theta$ を用いた式で表せ。また，その式を学習する授業で生徒に説明する場面を想定し，式の導出過程について，簡潔に説明せよ。

(2)　$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，関数 $y=2\sin^2x+\sin x\cos x+3\cos^2x-1$ の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

5　a を実数とする。x についての方程式 $2x^3-4ax^2+27=0$ の異なる実数解の個数を調べなさい。

6　「$a>0$，$b>0$ のとき，$\left(a+\dfrac{4}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)$ の最小値を求めなさい。」という問題に対して，生徒Aは次のように解答した。後の問いに答えなさい。

生徒Aの解答

$a>0$，$\dfrac{4}{b}>0$　であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a+\frac{4}{b}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{b}}=4\sqrt{\frac{a}{b}}\quad\cdots\cdots①$$

同様に，$b>0$，$\dfrac{9}{a}>0$　であるから，$b+\dfrac{9}{a}\geqq 2\sqrt{b\cdot\dfrac{9}{a}}=6\sqrt{\dfrac{b}{a}}$　……②

①，②の辺々をかけて　$\left(a+\dfrac{4}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)\geqq 4\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot 6\sqrt{\dfrac{b}{a}}=24$

答え　24

(1)　生徒Aの解答には，間違いがある。その間違えた部分を指摘し，生徒Aの解答が間違いである理由について，簡潔に説明せよ。

(2)　「$a>0$，$b>0$ のとき，$\left(a+\dfrac{4}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)$ の最小値を求めなさい。」という問題に対する，正しい解答を書け。

7　平成30年3月に告示された高等学校学習指導要領では，「数学Ⅰ」において「仮説検定の考え方」，また，「数学B」において「正規分布を用いた仮説検定の方法」を学習することとしている。仮説検定の手順について次のように説明するとき，後の問いに答えなさい。

仮説検定の手順

①　ある事象Eが起こった状況や原因を推測し，仮説を立てる。

②　その仮説を数学的に記述することで，統計的に実証したい仮説 H_1（対立仮説）を立て，その否定命題としての仮説 H_0（帰無仮説）を考える。

③　帰無仮説 H_0 が真であると仮定した場合に事象Eが起こる確率 p を求める。

④　$\boxed{\qquad\qquad X\qquad\qquad}$

(1)　$\boxed{X}$ に当てはまる文を簡潔に書き，仮説検定の手順を完成させよ。ただし，解答に当たっては，「有意水準」という語を用いること。

(2)　日常生活や身のまわりの事象について，仮説検定を用いて判断できる事例としてどのようなものが考えられるか。生徒に授業で説明する場面を想定し，仮説検定を行う手順に沿って，簡潔に説明せよ。

科目	数　学　解答用紙	２枚中の１	受験番号		氏名	

（４年）

1

(1)		(2)		(3)		(4)	
(5)	外心　　内心　　重心	(6)		(7)			

2

(1)

(2)

(3)

3

(1)

(2)

4

(1)

(2)

科目	数　学　解 答 用 紙	２枚中の２	受験番号		氏名	

（４年）

5

6

(1)

(2)

7

(1)

(2)

以下はあくまでも解答の一例です。

科目	数　学　解 答 用 紙	2枚中の1	受験番号		氏名	

（4年）

1 （**60点**）

(1)	12	(2)	18通り	(3)	420	(4)	点 $4i$ を中心とする半径2の円
(5)	外心 $\left(3,\ \dfrac{7}{2}\right)$　内心 $(2,\ 3)$　重心 $\left(\dfrac{7}{3},\ 3\right)$	(6)	$\dfrac{1}{2}\log\lvert 2x^3+x^2+3\rvert+C$	(7)	収束する。和は，$-\dfrac{1}{3}$		

2 （**20点**）

(1)

$\log_{10}3^{2022}=2022\times 0.4771$

$=964.6962$

よって　$10^{964}<3^{2022}<10^{965}$

であるから、3^{2022} は965桁の数である。……（答）

(2)

3^n の一の位は、3,9,7,1,3,9,7 ……と循環しており、その周期は4である。

$2022 = 4 \times 505 + 2$　であるから、

3^{2022} の一の位は9である。……（答）

(3)

(1)より、$3^{2022} = 10^{964.6962}$

$= 10^{0.6962} \times 10^{964}$

ここで、$\log_{10}4 = \log_{10}2^2 = 0.6020$

$\log_{10}5 = \log_{10}10 - \log_{10}2 = 0.6990$

より、$4 < 10^{0.6962} < 5$

よって 3^{2022} の最高位の数字は4である。　……（答）

3 （**20点**）

(1)

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}$　であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$

$=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$　……（答）

(2)

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{2}{9}k\vec{a}+\dfrac{1}{3}k\vec{b}+\dfrac{1}{3}k\vec{c}$

ここで，Eは3点A，B，Cを通る平面上の点であるから

$\dfrac{2}{9}k+\dfrac{1}{3}k+\dfrac{1}{3}k=1$　これを解いて、　$k=\dfrac{9}{8}$

よって、　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{9}{8}\overrightarrow{\mathrm{OG}}$　であるから

OG：GE ＝ 8：1　……（答）

4 （**25点**）

(1)（例）

$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$

この式の導出については、三角関数の加法定理（2倍角の定理）を用いる。

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

ここで、$\alpha=\dfrac{\theta}{2}$ とすると

$\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1$

よって、　$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$　となる。……（答）

(2)

関数の式を変形して

$y=\sin x\cos x+\cos^2 x+1$

$=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{3}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{3}{2}$

ここで、$0\leqq x\leqq\pi$ より　$\dfrac{\pi}{4}\leqq 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{9}{4}\pi$　よって

$2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$x=\dfrac{\pi}{8}$　のとき

y は、最大値 $\dfrac{\sqrt{2}+3}{2}$ をとる。　……（答）

科目	数 学 解 答 用 紙	2枚中の2	受験番号		氏名	

（4年）

5 （25点）

$x=0$ はこの方程式の解ではないので

$a=\dfrac{2x^3+27}{4x^2}$ と変形することができる。

ここで、 $f(x)=\dfrac{2x^3+27}{4x^2}$ とおいて

$y=f(x)$ と $y=a$ の共有点の個数を考える。

$$f'(x)=\frac{x^3-27}{2x^3}=\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{2x^3}$$

であるから、$f(x)$ の増減表は次のとおり

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	／	↘	$\frac{9}{4}$	↗

ここで

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ， $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty$

$\lim_{x\to-0} f(x)=\infty$ ， $\lim_{x\to+0} f(x)=\infty$

であるから、 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数、すなわち、この方程式の異なる実数解の個数は

$a<\frac{9}{4}$ のとき 1個

$a=\frac{9}{4}$ のとき 2個　　　……（答）

$\frac{9}{4}<a$ のとき 3個

6 （25点）

(1) （例）

①、②の辺々をかけた不等式においても等号が成り立つものとして解答した部分が間違いである。

なぜなら、

①の等号成立条件は　$a=\dfrac{4}{b}$　すなわち $ab=4$

②の等号成立条件は　$b=\dfrac{9}{a}$　すなわち $ab=9$

のときであるが、これらが同時に成り立つことはない。したがって、辺々をかけてできた不等式は等号が成り立つことがないため、最小値として24をとることはない。

(2)

$$\left(a+\frac{4}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)=ab+\frac{36}{ab}+13$$

ここで、 $ab>0,\ \dfrac{36}{ab}>0$　であるから

相加平均と相乗平均の大小関係により

$$ab+\frac{36}{ab}+13\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{36}{ab}}+13=25$$

等号は、$ab=\dfrac{36}{ab}$　すなわち $ab=6$ のときに成り立つ。

したがって、 $\left(a+\dfrac{4}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)$　の最小値は 25　……（答）

7 （25点）

(1) （例）

実験などを行う前に決めておいた「有意水準」と、事象Eが起こる確率 p とを比較して、帰無仮説 H_0 が真であると考えることを否定できるかどうかを判断し、仮説の妥当性を判断する。

(2) （例）

あるコインを１００回投げたときに表が６１回出たとき、このコインは表が出やすいように細工されているかどうかについて、仮説検定を用いて判断する。「このコインの表と裏の出る確率は等しい」という帰無仮説を立て、これが真であると仮定したとき、「表が61回以上出る」という確率 p を正規分布を利用して調べる。あらかじめ決めた有意水準と p を比較し、有意水準より p が小さければ帰無仮説が真であると考えることが否定され、「このコインは細工がされている」と考えることが妥当であると判断できる。