令和３年度採用

群馬県公立高等学校教員選考試験問題

数　　　　学

受験番号		氏名	

注　意　事　項

1　「開始」の指示があるまでは、問題用紙を開かないでください。

2　問題は、１ページから３ページまであります。「開始」の指示後、すぐに確認してください。

3　解答は、すべて解答用紙に記入してください。

4　「終了」の指示があったら、直ちに筆記具を置き、問題用紙と番号順に重ねた解答用紙を机の上に置いてください。

5　退席の指示があるまで、その場でお待ちください。

6　この問題用紙は、持ち帰ってください。

1　次の問いに答えなさい。ただし、解答は結果のみ記入しなさい。

(1)　男子３人、女子４人が１列に並ぶとき、男子と女子が交互に並ぶような並び方の総数を求めよ。

(2)　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}=1$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。ただし、$x<y$ とする。

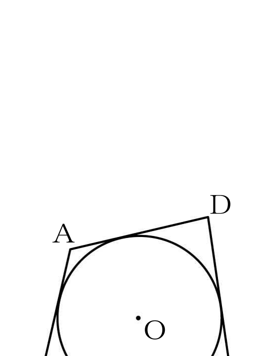
(3)　５人が１０点満点のテストを受験した。その５人の得点が、３点、４点、７点、a 点、b 点であったとする。５人の得点の平均値が４、分散が４のとき、a，b の値をそれぞれ求めよ。ただし、$a<b$ とする。

(4)　平面上の２点を、A$(1,\ 1)$、B$(2,\ 3)$とする。点Ｐが放物線 $y=x^2+4x+8$ 上を動くとき、△ＰＡＢの面積の最小値を求めよ。

(5)　$\tan\dfrac{\pi}{8}$ の値を求めよ。

(6)　$\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{12}$ を計算せよ。

(7)　四角形ＡＢＣＤの４つの辺に半径 r の円Ｏが内接している。
ＡＢ＝a、ＣＤ＝b のとき、四角形ＡＢＣＤの面積を a，b，r で表せ。



(8)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$ を求めよ。

2　次の問いに答えなさい。

(1)　関数 $y = 3^{x} + 3^{-x}$ の最小値と、そのときの x の値を求めよ。

(2)　関数 $y = 9^{x} - 5\cdot 3^{x} - 5\cdot 3^{-x} + 9^{-x}$（$x \geqq 0$）の最小値と、そのときの x の値を求めよ。

3　平面上の点 O を中心とする半径２の円周上に３点 A，B，C があり、$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たしている。次の問いに答えなさい。

(1)　線分 AB の長さを求めよ。

(2)　直線 AB と直線 OC の交点を D とするとき、OD : DC を最も簡単な整数比で表せ。

(3)　四角形 OBCA の面積を求めよ。

4　次の関数 $f(x)$ について、後の問いに答えなさい。

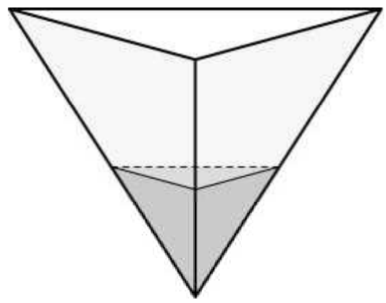
$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (x<0) \\ 2\sin x & (x \geqq 0) \end{cases}$$

(1)　$x = 0$ において、$f(x)$ が連続であるかどうかを調べよ。

(2)　$x = 0$ において、$f(x)$ が微分可能であるかどうかを調べよ。

5　n を３以上の自然数とする。５個の赤球が入っている袋に白球を n 個入れて、袋の中から５個の球を取り出す。取り出した５個の球の内訳が赤球２個、白球３個となる確率を P_n としたとき、P_n が最大となる n を求めなさい。

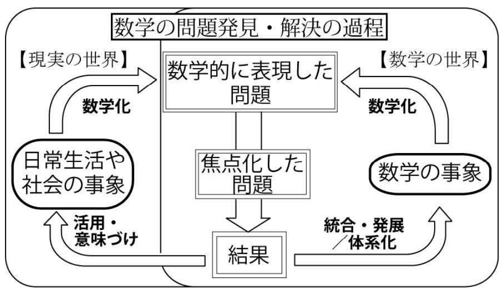
6　１辺が６cm の正四面体の１つの面が開いた状態の容器をつくる。右の図のように、空の容器の開いている面を上向きにして、その面が水平となるように保ちながら、毎秒６ml の割合で水を入れるとき、水を入れ始めてから４秒後に水面が上昇する速度を求めなさい。



7　数学Ｂの数列の授業において、「十分な長さをもつロープが２本ある。この２本のロープをそれぞれ半分に切ってから１本だけ取り除くと、３本のロープが残る。次にこの３本のロープを再びそれぞれ半分に切ってから１本だけ取り除くと、５本のロープが残る。『ロープをそれぞれ半分に切ってから１本取り除く』という手順を *n* 回繰り返したとき、残ったロープの本数を *n* を用いて表しなさい。」という問題を扱うこととする。次の問いに答えなさい。

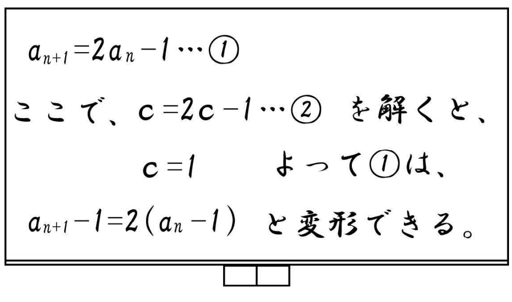
(1)　平成３０年３月に告示された高等学校学習指導要領では、数学の学習における「数学的活動」の充実を求めている。図Ⅰは「数学的活動」のイメージとして、数学における問題発見　・解決の過程を示したものである。数列の授業で扱うこととしたロープの問題において、図Ⅰで示された、【現実の世界】における事象の「数学化」とはどのような過程か、具体的に説明せよ。

図Ⅰ



(2)　この問題について、授業で図Ⅱのような板書を用いて解説したところ、授業を受けている生徒から、「なぜ、②の方程式の解 $c = 1$ を用いると、①の漸化式を変形できるのですか。」という質問を受けた。数学Ｂを学習している生徒が理解できるよう、その理由を分かりやすく説明せよ。

図Ⅱ



科目	数　学　解 答 用 紙	２枚中の１	受験番号		氏名	

（３年）

1

(1)		(2)		(3)		(4)	
(5)		(6)		(7)		(8)	

2

(1)

(2)

3

(1)

(2)

(3)

4

(1)

(2)

科目	数　学　解 答 用 紙	２枚中の２	受験番号		氏名	

（３年）

5

6

7

(1)

(2)

以下はあくまでも解答の一例です。

科目	数　学　解 答 用 紙	２枚中の１	受験番号		氏名		（３年）

1 **（32 点）**

(1)	144　通り	(2)	$(x, y)=(3, 12), (4, 8)$	(3)	$a=1,\ b=5$	(4)	4
(5)	$\sqrt{2}-1$	(6)	-64	(7)	$(a+b)r$	(8)	$2\sqrt{2}-2$

2 **（10 点）**

(1)

$3^x>0$、$3^{-x}>0$ であるから、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$3^x+3^{-x} \geqq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$$

等号は、$3^x=3^{-x}$ すなわち $x=0$ のときに成り立つ。

したがって、$x=0$ のとき y の最小値 2　…（答）

(2)

$y=9^x+9^{-x}-5(3^x+3^{-x})$

ここで、$t=3^x+3^{-x}$ とおくと、(1) より $t \geqq 2$ で、

$9^x+9^{-x}=t^2-2$ であるから、

$$y=t^2-5t-2=\left(t-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{33}{4}$$

よって、$t=\frac{5}{2}$ のとき、y は最小値をとる。

$3^x+3^{-x}=\frac{5}{2}$ より、$3^x=X$ とおくと、

$2X^2-5X+2=0$　これを解いて、$X=\frac{1}{2}$, 2

$x \geqq 0$ より $X \geqq 1$、したがって、$X=2$

以上より、$x=\log_3 2$ のとき、y の最小値 $-\frac{33}{4}$　…（答）

3 **（14 点）**

(1)

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$ であり、

$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OC}$ の両辺の大きさの２乗を考えて、

$$4|\overrightarrow{OA}|^2+12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+9|\overrightarrow{OB}|^2=16|\overrightarrow{OC}|^2$$

これを解いて、

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1$$

また、$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2$ より、

$$|\overrightarrow{AB}|^2=6$$

$|\overrightarrow{AB}|>0$ であるから、

$\mathrm{AB}=\sqrt{6}$　…（答）

(2)

$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OC}$ より、

$$\overrightarrow{OC}=\frac{5}{4}\cdot\frac{2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{5}$$

$\overrightarrow{OD'}=\frac{2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{5}$ とすると、

D′ は線分 AB 上にある点であり、
OC 上の点でもあることから、
D′ と D は一致する。
したがって、

$$\overrightarrow{OC}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OD}$$

であるから、

OD：DC ＝ 4：1　…（答）

(3)

$$\triangle \mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

また、OD：DC ＝ 4：1 であることから、△ OAB と△ CAB を、ともに底辺を AB として考えると、

△ OAB：△ CAB ＝ 4：1

したがって、四角形 OBCA の面積を S とすると、

$$S=\frac{5}{4}\triangle \mathrm{OAB}=\frac{5\sqrt{15}}{8}$$　…（答）

4 **（10 点）**

(1)

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\sin x=0$$

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}2\sin x=0$$

また、$f(0)=2\sin 0=0$ である。

よって、$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$ であるから、

$f(x)$ は $x=0$ で連続である。

(2)

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{\sin h}{h}=1$$

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{2\sin h}{h}=2$$

したがって、$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\neq\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

であるから、$f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。

以下はあくまでも解答の一例です。

科目	数　学　解 答 用 紙	２枚中の２	受験番号		氏名		（３年）

5　**（12 点）**

白球を n 個入れたときに、取り出した 5 個の球の

内訳が赤球 2 個、白球 3 個となる確率を P_n とおくと、

$$\mathrm{P}_n = \frac{{}_5\mathrm{C}_2 \cdot {}_n\mathrm{C}_3}{{}_{n+5}\mathrm{C}_5} = \frac{200n(n-1)(n-2)}{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}$$

ここで、$\dfrac{\mathrm{P}_{n+1}}{\mathrm{P}_n} > 1$　となるときを考えると

$$\frac{\mathrm{P}_{n+1}}{\mathrm{P}_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+6)(n-2)} > 1$$　より

$n < \dfrac{13}{2}$　となる。

すなわち、$n = 3,\ 4,\ 5,\ 6$ のときは $\mathrm{P}_n < \mathrm{P}_{n+1}$

$n \geqq 7$ のときは $\mathrm{P}_n > \mathrm{P}_{n+1}$ となるので、

$\mathrm{P}_3 < \mathrm{P}_4 < \mathrm{P}_5 < \mathrm{P}_6 < \mathrm{P}_7 > \mathrm{P}_8 > \mathrm{P}_9 > \cdots$

となることがわかる。

したがって、P_n が最大となるのは

$n = 7$　…（答）

6　**（12 点）**

1 辺が 6 cm の正四面体は、底面積 $9\sqrt{3}$ cm^2、高さ $2\sqrt{6}$ cm、体積 $18\sqrt{2}$ cm^3　である。

この容器に水を入れ始めてから t 秒後の水の深さを h cm、水面の面積を S cm^2、水の体積を V cm^3 とすると、

$h^2 : S = (2\sqrt{6})^2 : 9\sqrt{3} = 8 : 3\sqrt{3}$　　よって、$S = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}h^2$ 、$V = \dfrac{\sqrt{3}}{8}h^3$

容器には毎秒 6 ml の割合で水を入れるので、$\dfrac{dV}{dt} = 6$　よって、$\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dh} \cdot \dfrac{dh}{dt} = 6$　…①

ここで、$\dfrac{dV}{dh} = S = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}h^2$　であるから、①に代入して、$\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{16}{\sqrt{3}\,h^2}$　…②

$t = 4$ のとき、$V = 6 \cdot 4 = 24$ であるから、$\dfrac{\sqrt{3}}{8}h^3 = 24$　　これを解いて、$h = 4 \cdot 3^{\frac{1}{6}}$

②に h を代入すると、$\dfrac{dh}{dt} = 3^{-\frac{5}{6}}$　　したがって、4 秒後に水面が上昇する速度は　$3^{-\frac{5}{6}}$ cm/秒　…（答）

7　**（10 点）**

（1）（例）

　ロープの本数について、「半分に切ってから 1 本取り除く」という手順を、その数量の変化のしかたに着目して捉え、その変化を数列の漸化式で表すことによって、この課題を数学の舞台に載せて考察しようとする過程のこと。

（2）（例）

数列 $\{a_n\}$ について、漸化式　$a_{n+1} = pa_n + q$　…①
と初項 a_1 が与えられたとき、$(p \neq 0,\ p \neq 1)$
①に対して等式　$c = pc + q$　…②
を考えて、①－②とすると、
　$a_{n+1} - c = p(a_n - c)$
が得られる。この式から、②を満たす c によって、
数列 $\{a_n - c\}$ は、初項 $a_1 - c$ 、公比 p の等比数列であることが分かり、このことを利用して一般項 a_n を求めることができる。

この問題では、漸化式 $a_{n+1} = 2a_n - 1$　が得られるため、方程式 $c = 2c - 1$　を用いることで、一般項を求めることができる。