2020年度採用

群馬県公立高等学校教員選考試験問題

数　　学

受験番号		氏名	

注　意　事　項

1　「開始」の指示があるまでは、問題用紙を開かないでください。

2　問題は、1ページから3ページまであります。「開始」の指示後、すぐに確認してください。

3　解答は、すべて解答用紙に記入してください。

4　「終了」の指示があったら、直ちに筆記具を置き、問題用紙と番号順に重ねた解答用紙を机の上に置いてください。

5　退席の指示があるまで、その場でお待ちください。

6　この問題用紙は、持ち帰ってください。

1　次の問いに答えなさい。ただし、解答は結果のみ記入しなさい。

(1)　$\dfrac{1147}{1258}$ を既約分数に直せ。

(2)　3 辺の長さが 5, 6, 9 である三角形について、最大の角の余弦の値を求めよ。

(3)　8 人の生徒を 3 人, 3 人, 2 人の組に分けるとき、分け方の総数は何通りあるか求めよ。

(4)　放物線 $y = x^2 + 2$ の接線のうち、原点を通るものをすべて求めよ。

(5)　99! を計算した値は、末尾に 0 がいくつ並ぶか求めよ。

(6)　右の①, ②, ③は、2 つの変量 x, y についてのデータである。①, ②, ③の相関係数は 0.94, 0.03, −0.92 のいずれかである。それぞれのデータの相関係数を答えよ。

①

x	19	33	33	43	88	90
y	39	12	21	22	23	31

②

x	4	21	29	56	68	86
y	34	31	24	25	11	12

③

x	15	23	47	54	72	95
y	11	14	25	20	31	55

2　△OAB において、2 辺 OA, OB をそれぞれ 3 : 1, 4 : 1 に内分する点を C, D とし、BC と AD の交点を P、CD と OP の交点を Q とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくとき、次の問いに答えなさい。

(1)　$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

3　関数 $f(x)=x^2-4x+2$ と関数 $g(x)=-x^2-2x+a-1$ について、$-3 \leqq x \leqq 3$ の範囲で次の条件が成り立つような a の範囲を、それぞれ求めなさい。

(1)　すべての x に対して　$f(x)<g(x)$　が成り立つ。

(2)　ある x に対して　$f(x)<g(x)$　が成り立つ。

4　数学Ⅱの授業において、「2 つの円 $x^2+y^2-2=0$　…①、$x^2-4x+y^2-6y=0$ …② の 2 つの交点と点（3, 1）を通る円の、中心の座標と半径を求めよ。」という問題の解答を考える際に

$$k\ (x^2+y^2-2)\ +x^2-4x+y^2-6y=0 \quad \cdots③ \quad (k \text{ は定数})$$

という方程式を用いた。次の問いに答えなさい。

(1)　方程式③を用いて、この問題を解け。

(2)　授業を受けている生徒から、「なぜ方程式③を用いると、円①, ②の 2 つの交点を通る図形を求められるのですか。」という質問を受けた。数学Ⅱを学習している生徒が理解できるよう、その理由をわかりやすく説明せよ。

5　最初の数は 1、次の 2 つの数は 2, 1、次の 3 つの数は 3, 2, 1、のようにしてつくられる自然数の列 1, 2, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 5, 4, 3, 2, 1, 6, ･･･について、次の問いに答えなさい。

(1)　この数列において、50 が初めて現れるのは最初から数えて何番目か求めよ。

(2)　この数列において、最初から数えて 303 番目の数を求めよ。

6　空間内に、1 辺の長さが 6 の正三角形と、その辺上に中心をもつ半径 1 の球がある。球の中心が正三角形の 3 辺をたどって一周したとき、球が通過してできた立体の体積を求めなさい。

7　半径 a の円 C が、定直線に接しながら滑ることなく回転するとき、円 C の周上の定点 P(x, y)は、サイクロイドと呼ばれる曲線を描く。このことについて、次の問いに答えなさい。

(1)　この曲線が、媒介変数 θ によって、$x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ と表されることを図を用いて説明せよ。

(2)　平成 30 年 3 月に告示された高等学校学習指導要領では、科目「数学Ⅰ」、「数学Ⅱ」、「数学Ⅲ」において課題学習を実施し、生徒の数学的活動を一層充実させることが求められている。

　この曲線、またはこの曲線に関連した題材を用いた課題学習を行う際に、生徒の主体的な学習を促し、数学のよさを認識させるような課題としてどのようなものが考えられるか、課題の内容を具体的に書け。

科目	数 学 解 答 用 紙	2枚中の1	受験番号		氏名	

(2020年)

1

(1)		(2)		(3)	
(4)		(5)		(6)	① ② ③

2

(1)

(2)

3

(1)

(2)

4

(1)

(2)

科目	数　学　解答用紙	２枚中の２	受験番号		氏名	

(2020 年)

5

(1)

(2)

6

7

(1)

(2)

以下はあくまでも解答の一例です。

科目	数学解答用紙	2枚中の1	受験番号		氏名	

(2020年)

1（36点）

(1)	$\frac{31}{34}$	(2)	$-\frac{1}{3}$	(3)	280通り
(4)	$y=2\sqrt{2}x$，$y=-2\sqrt{2}x$	(5)	22個	(6)	① 0.03　② − 0.92　③ 0.94

2（10点）

(1)

$AP : PD=s : (1-s)$　$(0<s<1)$，$BP : PC=t : (1-t)$　$(0<t<1)$
とおく。このとき，点Pは線分ADの内分点であるから

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}=(1-s)\vec{a}+\frac{4}{5}s\vec{b}$　…①

また，点Pは線分BCの内分点であるから

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}=(1-t)\vec{b}+\frac{3}{4}t\vec{a}$　…②

ここで，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$かつ$\vec{a}$と$\vec{b}$は平行でないから①，②より

$1-s=\frac{3}{4}t$，$\frac{4}{5}s=1-t$　　これを解いて　$s=\frac{5}{8}$，$t=\frac{1}{2}$

したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$　…（答）

(2)

kを実数として

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ とおくと，$\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{8}k\vec{a}+\frac{1}{2}k\vec{b}$

よって

$\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{8}k\cdot\frac{4}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}k\cdot\frac{5}{4}\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}k\overrightarrow{OC}+\frac{5}{8}k\overrightarrow{OD}$

ここで，点Qは線分CD上の点であるから

$\frac{1}{2}k+\frac{5}{8}k=1$　∴ $k=\frac{8}{9}$

ゆえに　$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$　…（答）

3（10点）

(1)

$h(x)=g(x)-f(x)$ とすると，$-3\leqq x\leqq 3$ における
$h(x)$の最小値が0より大きくなればよい。

$h(x)=-2x^2+2x+a-3$
$=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{5}{2}$

であるから，最小値は$x=-3$のとき，$h(-3)=a-27$
よって

$a-27>0$　∴ $a>27$　…（答）

(2)

(1)と同様に $h(x)=g(x)-f(x)$ を考えると
$-3\leqq x\leqq 3$における$h(x)$の最大値が0より大きく
なればよい。

よって

$a-\frac{5}{2}>0$　∴ $a>\frac{5}{2}$　…（答）

4（10点）

(1)

方程式③は2つの円①，②の交点を通る円または直線を表すから，この式に(3，1)を代入して

$k(3^2+1^2-2)+3^2-4\cdot3+1^2-6\cdot1=0$
$8k-8=0$　∴ $k=1$

③に$k=1$を代入して
$2x^2-4x+2y^2-6y-2=0$

すなわち

$(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$

したがって
円の中心 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$，半径 $\frac{\sqrt{17}}{2}$　…（答）

(2)（例）

方程式③は，kがどのような値であったとしても，連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2-2=0 \\ x^2-4x+y^2-6y=0 \end{cases}$$

の2解に対して，常に成り立つ。
また，この連立方程式の2解は，円①，②の2つの交点を示している。
すなわち，方程式③が表す図形は，kがどのような値をとっても，2つの円の交点を通ることがわかる。

科目	数 学 解答用紙	2枚中の2	受験番号		氏名	

(2020年)

5（12点）

(1)

1 | 2, 1 | 3, 2, 1 | 4, 3, 2, 1 | 5, 4, 3, 2, 1 | 6, …
のように群数列を考えると，50 が初めて現れるのは第 50 群の第 1 項であるから

$$1+2+3+\cdots+48+49+1=\frac{1}{2}\cdot 49\cdot 50+1$$

$$=1226\text{（番目）}\quad\cdots\text{（答）}$$

(2)

303 番目の数が第 n 群に属しているとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<303\leqq\frac{1}{2}n(n+1)\quad\cdots①$$

$$\therefore\ (n-1)n<606\leqq n(n+1)$$

ここで

$24\cdot25=600$，$25\cdot26=650$

であるから，①を満たす n は 25

よって，303 番目の数は，第 25 群に属している。

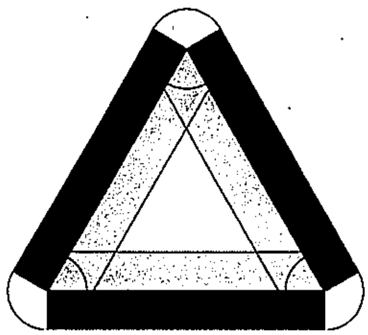
また，第 24 群の最後の項は，最初から数えて

$\frac{1}{2}\cdot24\cdot25=300$（番目）であるから，303 番目の数は第 25 群の第 3 項であることが分かる。

したがって，303 番目の数は 23 …（答）

6（12点）

半径 r ($0<r\leqq1$) の円を考える。右の図のように，この円の中心が正三角形の 3 辺をたどって一周したときに通過する領域の面積を求めると



$$\frac{1}{2}\cdot6\cdot3\sqrt{3}+6r\cdot3+\pi r^2-\frac{1}{2}\cdot(6-2\sqrt{3}r)\cdot(3\sqrt{3}-3r)$$

$$=36r+(\pi-3\sqrt{3})r^2\quad\cdots①$$

ここで，正三角形を含む平面に対して垂直に x 軸をとる。このとき，球が通過してできた立体を x 軸に対して垂直に切ると，その切り口は半径 r の円の中心が正三角形の周上を一周するときに通過する領域となる。また，球の半径が 1 であることから，$x^2+r^2=1$ の関係が成り立つので，$r=\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq1)$

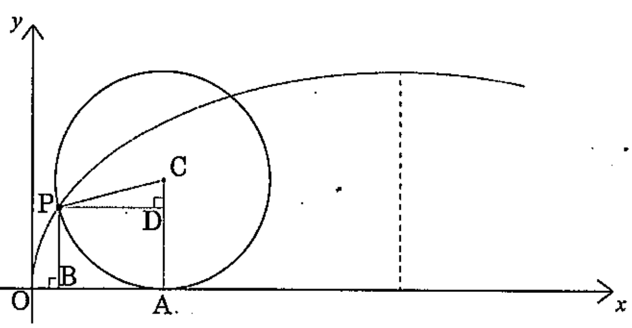
ゆえに求める体積は，①より

$$\int_{-1}^{1}\left\{36\sqrt{1-x^2}+(\pi-3\sqrt{3})(1-x^2)\right\}dx=2\int_0^1 36\sqrt{1-x^2}\,dx+2\int_0^1(\pi-3\sqrt{3})(1-x^2)dx$$

$$=18\pi+2(\pi-3\sqrt{3})\cdot\frac{2}{3}=\frac{58}{3}\pi-4\sqrt{3}\quad\cdots\text{（答）}$$

7（10点）

(1)（例）



図のように，定直線を x 軸，点 P の初めの位置を原点 O とし，中心 C の円が角 θ だけ回転して x 軸と点 A で接する，すなわち∠PCA $=\theta$ となったときの P の座標を (x, y) とする。 OA ＝弧AP $=a\theta$ であるから，図のように点 B，D を定めると

$x=\mathrm{OB}=\mathrm{OA}-\mathrm{BA}=a\theta-a\sin\theta$

$y=\mathrm{BP}=\mathrm{AD}=\mathrm{AC}-\mathrm{DC}=a-a\cos\theta$

よって，サイクロイドの媒介変数表示は

$x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$ と表される。

(2)（例）

- サイクロイド曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めたり，サイクロイド曲線の長さについて考察したりする課題。
- 定円 C_1 上を円 C_2 が内接しながらすべることなく回転するときに，C_2 上の定点 P が描く曲線（ハイポサイクロイド）について，その媒介変数表示を調べたり，特にこの曲線がアステロイドとなる場合について考察したりする課題。
- 定円 C_1 上を円 C_2 が外接しながらすべることなく回転するときに，C_2 上の定点 P が描く曲線（エピサイクロイド）について，その媒介変数表示を調べたり，特にこの曲線がカージオイドとなる場合について考察したりする課題。